אלגברה-1-מ' (104016) – בוחן ביניים – סמסטר אביב תשס"ה

פרטי הסטודנט:

שם משפחה ..... שם פרטי .....

מספר תעודת זהות ..... פקולטה .....

הוראות: משך הבוחן שעתיים, והוא מורכב משש שאלות. על כל שאלה יש לענות בצירוף הסבר **קצר אך מלא ומסודר.** יש לכתוב את הפתרון **בשני צדי הדף**. אם הדף אינו מספיק אפשר להמשיך את הפתרון בשני הדפים האחרונים , תוך ציון ברור של המקום. את כל עבודת הטיוטה יש לבצע **רק** במחברת המצורפת **ולא** בשאלון הבוחן. אין להגיש את מחברת הטיוטה. **אסור** להשתמש בדפי עזר, במחשבונים או בטלפונים. **בהצלחה!**

שאלה 1 (15%).

בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכח את הטענה אם היא נכונה, או הפרך אותה באמצעות דוגמה נגדית.

(א) אם A , B שתי מטריצות מסדר $n\times n$ המקיימות $AB=O$, אז $r(A)+r(B)\le n$.

(ב) אם A , B שתי מטריצות מסדר $n\times n$ המקיימות $A+B=O$, אז $r(A)+r(B)\le n$.

(ג) אם A מטריצה מסדר $n\times n$, והיא תלויה ליניארית במטריצה המוחלפת A^T, אז בהכרח המטריצה A היא סימטרית או אנטי-סימטרית.

פתרון:

שאלה 2 (20%).

(א) יהי $w=\frac{1+z}{1-z}$ באשר $z\neq 1$ מספר מרוכב. הוכח ש- $\mathrm{Re}(w)\geq 0$ אם ורק אם $|z|\leq 1$.

(ב) פתור את המשוואה $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$. רשום את הפתרונות בצורה רגילה $z=a+bi$, באשר a,b מספרים ממשיים.

פתרון:

שאלה 3 (20%).

יהיו U ו- W שני התת-מרחבים הבאים של המרחב $R^{2\times 2}$ של המטריצות הממשיות מסדר 2×2:

$$U=\left\{\begin{pmatrix}-x-y & x\\ y & 0\end{pmatrix} \;\middle|\; x,y\in R\right\} \qquad W=span\left\{\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

(א) מצא בסיס ומימד ל- U.

(ב) מצא בסיס ומימד ל- W.

(ג) השלם את הבסיס שמצאת ל- W לבסיס לכל המרחב $R^{2\times 2}$.

(ד) מצא בסיס ומימד ל- $U+W$.

(ה) מצא את $\dim(U\bigcap W)$.

(ו) האם $U\oplus W=R^{2\times 2}$? נמק!

פתרון:

שאלה 4 (12%).

הוכח את הטענות הבאות:

(א) אם $v_1, v_2, \ldots, v_k$ הם וקטורים בלתי תלויים ליניארית במרחב וקטורי V, ו- u הוא וקטור ב- V אשר **איננו** צירוף ליניארי שלהם, אז הקבוצה $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, u\}$ היא בלתי תלויה ליניארית.

(ב) תהי A מטריצה מסדר 5×4, ונתון שהמערכת הליניארית $Ax=b$ פתירה אם ורק אם b הוא וקטור עמודה שבו הרכיב השני והרביעי שווים ל- 0. אז קיים ב- R^4 וקטור עמודה c אשר עבורו המערכת הליניארית $A^T x=c$ איננה פתירה (A^T היא המטריצה המוחלפת של A).

פתרון:

שאלה 5 (20%).

נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x+3y+4z=-1 \\ -3x+y+(\alpha-\beta+5)z=\alpha+\beta+7 \end{cases}$, באשר α,β פרמטרים ממשיים.

(א) מצא את כל ערכי α,β אשר עבורם למערכת אין פתרון.

(ב) מצא את כל ערכי α,β אשר עבורם למערכת יש פתרון אחד ויחיד.

(ג) מצא את כל ערכי α,β אשר עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות.

(ד) רשום את רכיב z של הפתרון כאשר הפתרון הוא יחיד.

(ה) רשום את הפתרון הכללי כאשר יש אינסוף פתרונות.

פתרון:

שאלה 6 (13%).

U ו- W הם שני התת-מרחבים הבאים של R^4: $U = span\{(2,2,1,-3),(-\lambda,1-\lambda,-1,4)\}$

באשר λ מספר ממשי, ו- W הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $\begin{cases} x+y+z \quad =0 \\ y+2z-2t=0 \end{cases}$.

חשב את הערך של λ אשר עבורו מתקיים $\dim(U \cap W)=1$, ומצא בסיס ל- $U \cap W$ במקרה זה.

פתרון:

מקום להמשך הפתרונות: